

Elektrotechnik – 3. Gleichstrom

Luft- und Raumfahrttechnik Bachelor, 1. Semester

David Straub

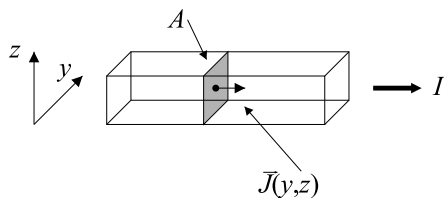
3. Gleichstrom

1. Stromstärke und Stromdichte
2. Stromleitung in Metallen
3. Ohm'sches Gesetz und Widerstand
4. Temperaturabhängigkeit des Widerstands
5. Die Kirchhoff'schen Gesetze
6. Reihen- und Parallelschaltung, Teilerregeln
7. Zweipoltheorie
8. Arbeit und Leistung
9. Reale Messungen im Gleichstromkreis

Elektrischer Strom (*electric current*)

Strom ist der gerichtete Fluss von elektrischer Ladung

- Stromdichte $\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$
 - $\vec{v}$: Geschwindigkeit *positiver* Ladungsträger
- Stromstärke $I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{dQ}{dt}$
- $[I] = A = \frac{C}{s}$
- $[\vec{J}] = \frac{A}{m^2}$

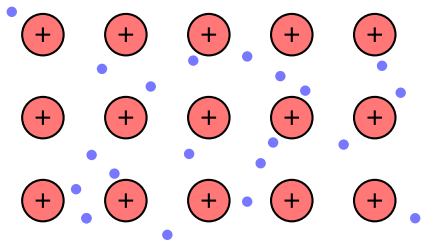


Stromrichtung & Ladungsträger

- $\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$ zeigt in die Richtung, in die sich *positive* Ladung bewegt – egal ob die tatsächlichen Ladungsträger positiv oder negativ sind!
- Das ist auch die *Zählrichtung* der Stromstärke I („technische Stromrichtung“)

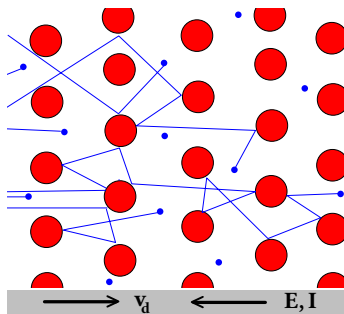
Stromleitung in Metallen

- In Metallen gibt jedes Atom Elektronen ab, die sich frei im Gitter der positiv geladenen Atomrümpfe bewegen können („Elektronengas“)
- Die Ladungsdichte der Elektronen ist jederzeit konstant, da eine Ansammlung ein elektrisches Feld erzeugen würde, das durch Abstoßung der Elektronen wieder ausgeglichen wird → der Leiter ist überall elektrisch neutral



Metalle im elektrischen Feld

Klassisches Bild: erfährt das Elektronengas ein elektrisches Feld, werden die Elektronen beschleunigt, nach kurzer Zeit aber durch Stöße mit dem Metallgitter wieder abgebremst. Im Mittel ergibt sich eine konstante **Driftgeschwindigkeit** $\vec{v}_d$, entgegen der Feldrichtung: $\vec{v}_d = \vec{J} / \rho$ mit $\rho = -ne$.



Zahlenbeispiel: Driftgeschwindigkeit im Kupferdraht

Kupfer, $A = 1 \text{ mm}^2$, $I = 1 \text{ A}$:

- Dichte freier Elektronen: $n \approx 8,5 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}$
- Ladungsträgerdichte: $\rho = -n \cdot e \approx -1,36 \cdot 10^{10} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$
- Stromdichte: $|\vec{J}| = \frac{I}{A} = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$
- Driftgeschwindigkeit: $|\vec{v}_d| = \frac{|\vec{J}|}{|\rho|} \approx 7,35 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,26 \frac{\text{m}}{\text{h}}$ 🐢

Warum geht das Licht trotzdem sofort an? → Das *Feld* breitet sich (fast) mit Lichtgeschwindigkeit aus, nicht die Elektronen.

Ohm'sches Gesetz (*Ohm's law*)

- Für ein gegebenes Material ist die Stromdichte umso höher, je höher das elektrische Feld ist
- Der Proportionalitätsfaktor ist die elektrische **Leitfähigkeit** σ :

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Achtung: die proportionale Beziehung gilt nur für *lineare Leiter* (z.B. Metalle bei konstanter Temperatur)

Ohm'sches Gesetz im linearen Leiter

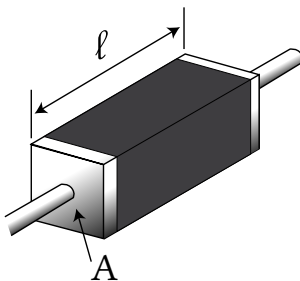
$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Leiter der Länge l , Querschnitt A , homogenes Feld:

$$I = J \cdot A = \sigma \cdot E \cdot A = \sigma \cdot \frac{U}{l} \cdot A = \frac{U}{R}$$

Elektrischer Widerstand (*electric resistance*):

$$R = \frac{l}{\sigma \cdot A} = \rho_R \cdot \frac{l}{A}$$



Widerstand und Leitwert

Der elektrische Widerstand R ist definiert durch das Ohm'sche Gesetz:

$$R = \frac{U}{I}, \quad [R] = \frac{V}{A} = \Omega \text{ (Ohm)}$$

Der elektrische Leitwert G ist der Kehrwert des Widerstands:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}, \quad [G] = \frac{A}{V} = S \text{ (Siemens)}$$

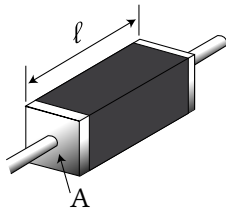
Materialeigenschaften vs. Bauteilgrößen

Materialeigenschaften (unabhängig von der Geometrie): - **Spezifischer Widerstand** ρ -

Leitfähigkeit $\sigma = \frac{1}{\rho}$

Bauteilgrößen (abhängig von der Geometrie): - **Widerstand** $R = \rho \frac{l}{A}$ - **Leitwert** $G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{A}{l}$

Beispiel: Kupfer hat immer die gleiche Leitfähigkeit $\sigma_{\text{Cu}} = 58 \text{ MS/m}$, aber ein dickeres Kabel hat einen kleineren Widerstand R .



Übersicht der Größen im linearen Leiter

Größe	Definition	Einheit	Name
Spannung (<i>voltage</i>)	$U = \Delta\varphi$	$[U] = \text{V}$	Volt
Stromstärke (<i>current</i>)	$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$	$[I] = \text{A}$	Ampere
Widerstand (<i>resistance</i>)	$R = \frac{U}{I}$	$[R] = \Omega$	Ohm
Leitwert (<i>conductance</i>)	$G = \frac{1}{R}$	$[G] = \text{S} = \frac{1}{\Omega}$	Siemens
spezifischer Widerstand (<i>resistivity</i>)	$\rho = R \frac{A}{l}$	$[\rho] = \Omega \cdot \text{m}$	Ohm-Meter
Leitfähigkeit (<i>conductivity</i>)	$\sigma = \frac{1}{\rho}$	$[\sigma] = \text{S/m}$	Siemens pro Meter



Jetzt sind Sie dran: Stromdichte & Widerstand (zu zweit)

Aufgabe 6

In einer Glühlampe (12 V, Kfz-Blinker) fließt ein Strom $I = 0,5 \text{ A}$.

- Wie groß ist die Stromdichte S_1 im Glühfaden ($d_1 = 100 \mu\text{m}$)?
- Wie groß ist die Stromdichte S_2 in der Zuleitung ($d_2 = 1,5 \text{ mm}$)?
- Ein Kupferdraht hat die Länge $l = 5 \text{ m}$ und den Querschnitt $A = 3 \text{ mm}^2$ ($\rho_{\text{Cu}} = 1,79 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$). Wie groß ist sein Widerstand R ?
- Welchen Widerstand hat ein Draht gleicher Abmessungen aus Aluminium ($\rho_{\text{Al}} = 2,6 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$)?

Temperaturabhängigkeit des Widerstands

Bei den meisten Materialien ändert sich der Widerstand mit der Temperatur.

Lineare Näherung:

$$R(T) = R(T_0) \cdot [1 + \alpha \cdot (T - T_0)]$$

- α : Temperaturkoeffizient, $[\alpha] = \frac{1}{K}$
- T_0 : Bezugstemperatur (üblicherweise 20 °C oder 0 °C)

Leitfähigkeit verschiedener Materialien

Bei Leitern nimmt der Widerstand mit steigender Temperatur zu ($\alpha > 0$).

Typische Werte bei 20 °C:

Leitermaterial	ρ ($\mu\Omega \cdot m$)	σ (MS/m)	α (1/K)
Silber	0,016	63	$3,8 \cdot 10^{-3}$
Kupfer	0,017	58	$3,9 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	0,027	38	$4,3 \cdot 10^{-3}$
Messing	0,062	16	$2,0 \cdot 10^{-3}$

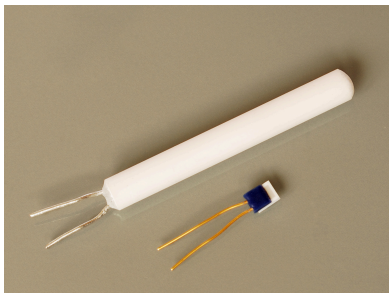
Metalle als Temperatursensoren

Die Temperaturabhängigkeit macht Metalle zu präzisen Temperatursensoren.

Platin-Widerstandsthermometer (Pt100): - $R(0^\circ C) = 100 \Omega$ - $\alpha_{Pt} = 3,85 \cdot 10^{-3} K^{-1}$

Vorteile: hohe Langzeitstabilität, Messbereich $-200^\circ C$ bis $+850^\circ C$, gute Linearität

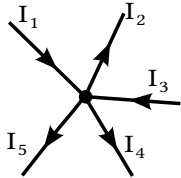
Klausur-Klassiker: aus gemessenem R (oder U bei bekanntem Strom) die Temperatur bestimmen! (→ Woche 5)



Knotenpunktregel (1. Kirchhoff'sches Gesetz)

In einem Knotenpunkt kann weder Ladung gespeichert noch erzeugt werden. Die Summe aller zufließenden Ströme ist gleich der Summe aller abfließenden Ströme:

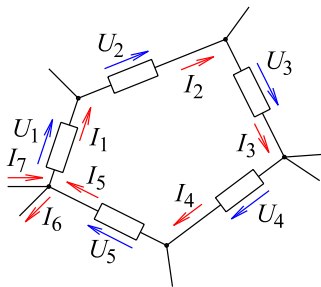
$$\sum_k I_k = 0$$



Maschenregel (2. Kirchhoff'sches Gesetz)

Die Summe aller in einer Masche auftretenden Spannungen ist Null:

$$\sum_k U_k = 0$$



Wie viele unabhängige Gleichungen gibt es?

Netzwerk mit k Knoten und z Zweigen:

- **Unabhängige Knotengleichungen:** $k - 1$ (die letzte Knotengleichung folgt aus den anderen)
- **Unabhängige Maschengleichungen:** $z - (k - 1)$

Zusammen: z Gleichungen für z unbekannte Zweigströme ✓

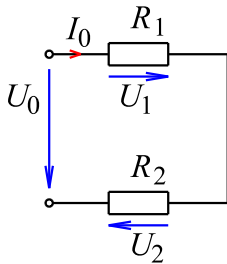
Beispiel: 2 Knoten, 3 Zweige $\rightarrow$ 1 Knotengleichung + 2 Maschengleichungen

Typische Prüfungsfrage: „Wie viele *unabhängige* Knotenpunktgleichungen gibt es hier? Stellen Sie diese auf.“

Reihenschaltung von Widerständen

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i$$

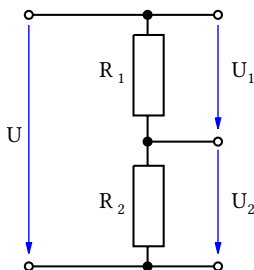
- Gleicher Strom durch alle Widerstände: $I = I_1 = I_2 = \dots = I_n$
- Gesamtspannung = Summe der Einzelspannungen
- Gesamtwiderstand > größter Einzelwiderstand



Spannungsteiler

Bei einer Reihenschaltung teilt sich die Gesamtspannung im Verhältnis der Widerstände auf:

$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

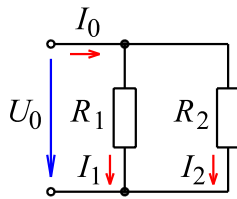


Parallelschaltung von Widerständen

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad \Leftrightarrow \quad G_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n G_i$$

- Gesamtstrom = Summe der Einzelströme (Knotenregel!)
- Gleiche Spannung an allen Widerständen
- Gesamtwiderstand < kleinster Einzelwiderstand

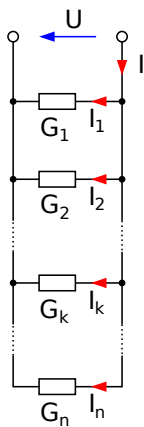
Herleitung: $I_{\text{ges}} = \frac{U}{R_1} + \dots + \frac{U}{R_n} \stackrel{!}{=} \frac{U}{R_{\text{ges}}}$



Stromteilerregel

Bei einer Parallelschaltung teilt sich der Gesamtstrom im umgekehrten Verhältnis der Widerstände bzw. im direkten Verhältnis der Leitwerte auf:

$$\frac{I}{G_{\text{ges}}} = \frac{I_1}{G_1} = \frac{I_2}{G_2} = \dots = \frac{I_n}{G_n}$$



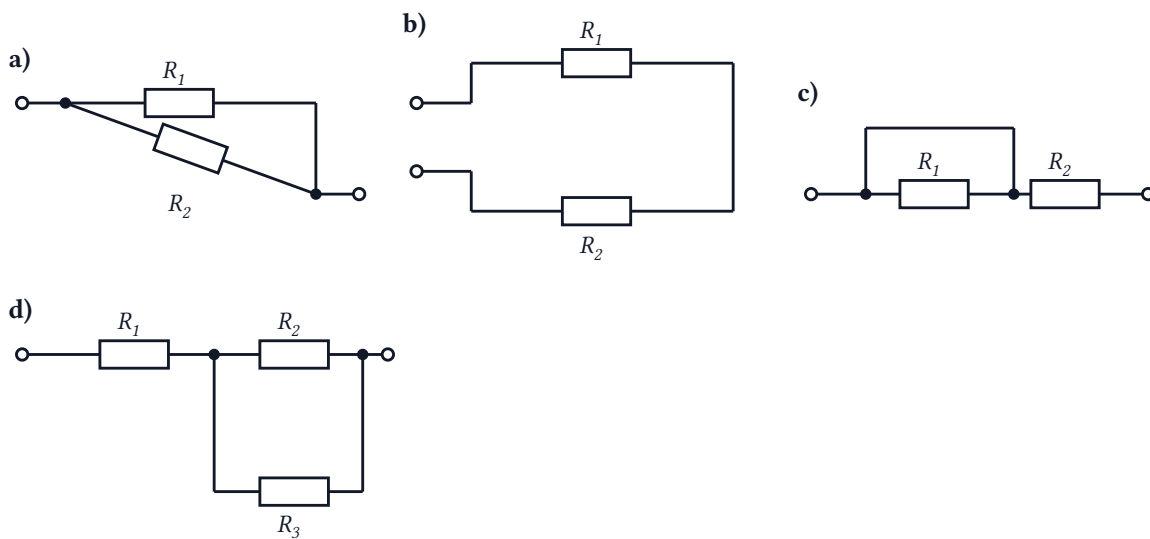
Reihe oder parallel? So erkennt man es *wirklich*

- **In Reihe** $\Leftrightarrow$ beide führen zwingend **denselben Strom** $\Leftrightarrow$ zwischen ihnen liegt **kein Knoten mit Abzweig**
- **Parallel** $\Leftrightarrow$ beide hängen an **denselben zwei Knoten** $\Leftrightarrow$ an beiden liegt zwingend **dieselbe Spannung**

⚠ Wie die Schaltung *gezeichnet* ist, bedeutet **gar nichts!**

Methode: Knoten markieren (einfärben/nummerieren) $\rightarrow$ alle Punkte, die nur durch Draht verbunden sind, sind *derselbe* Knoten $\rightarrow$ dann neu zeichnen.

🤔 Reihe, parallel – oder keins von beidem?



📝 Jetzt sind Sie dran: Spannungsteiler (zu zweit)

Aufgabe 7

Ein Spannungsteiler besteht aus $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ an einer Quelle $U = 12 \text{ V}$. Am Abgriff (über R_2) wird die Spannung U_a abgenommen. **Zeichnen Sie die Schaltung selbst!**

- Wie groß ist U_a im Leerlauf (kein Verbraucher angeschlossen)?
- Nun wird ein Verbraucher $R_L = 1 \text{ k}\Omega$ an den Abgriff angeschlossen (parallel zu R_2). Wie groß ist U_a jetzt?
- Wie viele Knoten, Zweige und unabhängige Gleichungen hat die Schaltung aus b)?

Zwischenstand & Ausblick

Heute:

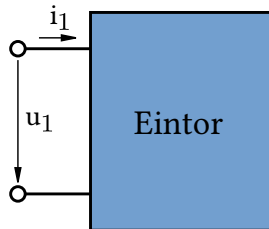
- Strom = Ladungstransport; $I = dQ/dt$, Stromdichte $J = I/A$
- Ohm: $R = U/I = \rho l/A$ – Material (ρ) $\times$ Geometrie (l/A)
- $R(T)$: linear mit Temperaturkoeffizient $\alpha \rightarrow$ Pt100-Sensor
- Kirchhoff: $\sum I_k = 0$ (Knoten), $\sum U_k = 0$ (Masche); $k - 1$ unabhängige Knotengleichungen
- Teilerregeln: Spannung $\propto R$ (Reihe), Strom $\propto G$ (parallel)
- Ein belasteter Spannungsteiler bricht ein!

Nächste Woche: Quellen und Zweipoltheorie – jedes lineare Netzwerk schrumpft auf zwei Kenngrößen.

Zweipoltheorie

Ein Zweipol (*two-pole*) oder Eintor (*one-port*) ist ein elektrisches Bauteil mit zwei zugänglichen Anschlüssen.

Das große Versprechen dieses Abschnitts: Jedes noch so komplizierte lineare Netzwerk verhält sich an zwei Klemmen wie eine Quelle mit **zwei Kenngrößen** (U_0 und R_i).



Passive lineare Zweipole

- Passiv: Zweipol gibt keine Energie ab
- Linear: Strom-Spannungs-Kennlinie ist eine Gerade

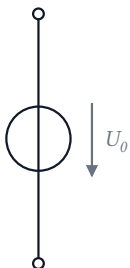
Passive lineare Zweipole können zu einem Ersatzwiderstand zusammengefasst werden:

$$U = R \cdot I$$

Ideale Spannungsquelle

Eine ideale Spannungsquelle liefert eine konstante Spannung U_0 , unabhängig von der Belastung.

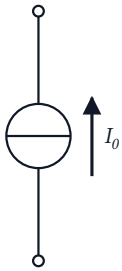
- Konstante Klemmenspannung $U = U_0$
- Innenwiderstand $R_i = 0$
- Beliebiger Strom I möglich



Ideale Stromquelle

Eine ideale Stromquelle liefert einen konstanten Strom I_0 , unabhängig von der Belastung.

- Konstanter Strom $I = I_0$
- Innenwiderstand $R_i = \infty$
- Beliebige Spannung U möglich

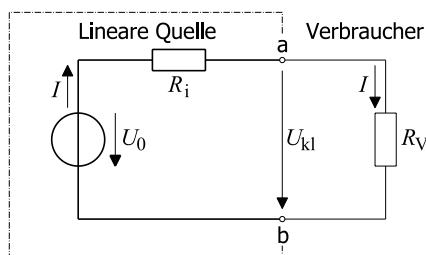


Reale Spannungsquelle

Eine reale Spannungsquelle = ideale Spannungsquelle U_0 **in Reihe** mit einem Innenwiderstand R_i :

$$U = U_0 - R_i \cdot I$$

- Leerlauf ($I = 0$): $U = U_0$ (maximale Spannung)
- Kurzschluss ($U = 0$): $I_k = \frac{U_0}{R_i}$ (maximaler Strom)

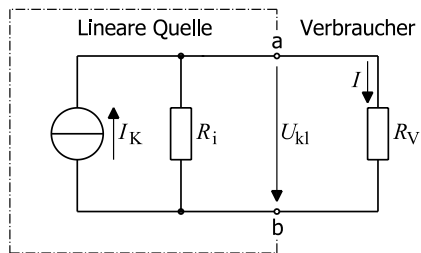


Reale Stromquelle

Eine reale Stromquelle = ideale Stromquelle I_0 **parallel** zu einem Innenwiderstand R_i :

$$I = I_0 - \frac{U}{R_i}$$

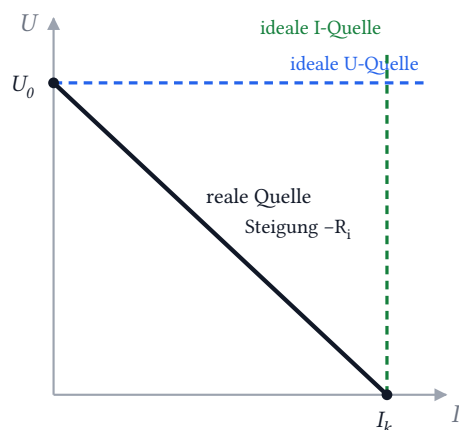
- Leerlauf: $U = I_0 \cdot R_i$
- Kurzschluss: $I = I_0$



Die U-I-Kennlinie

Alle vier Quellentypen auf einen Blick – die reale Quelle ist eine fallende Gerade zwischen zwei Punkten, die man messen (oder berechnen) kann:

- U_0 : Schnittpunkt mit der U-Achse (Leerlauf)
- I_k : Schnittpunkt mit der I-Achse (Kurzschluss)
- Steigung: $-R_i = -U_0/I_k$



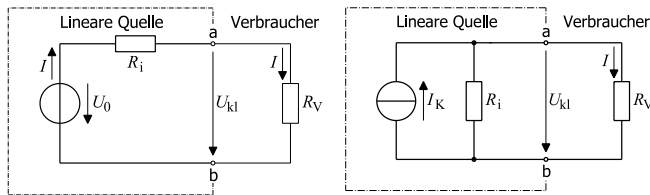
Äquivalenz von realer Spannungs- und Stromquelle

Reale Spannungsquelle und reale Stromquelle sind **äquivalent** (gleiche Kennlinie!), wenn:

$$U_0 = I_0 \cdot R_i \quad \Leftrightarrow \quad I_0 = \frac{U_0}{R_i}$$

Umrechnung (gleiche R_i !): - Spannungsquelle $\rightarrow$ Stromquelle: $I_0 = \frac{U_0}{R_i}$ - Stromquelle $\rightarrow$ Spannungsquelle: $U_0 = I_0 \cdot R_i$

Von außen sind beide nicht unterscheidbar – wählen Sie die Darstellung, die die Rechnung einfacher macht!

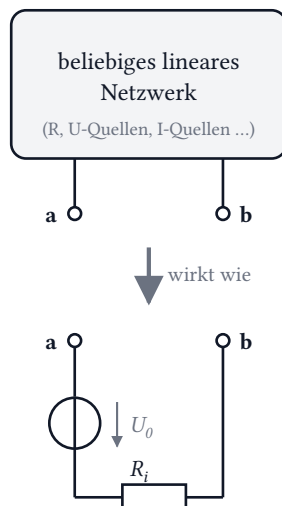


Ersatzquelle eines beliebigen Netzwerks bestimmen 🔑

Jedes lineare Netzwerk mit Quellen lässt sich an zwei Klemmen a–b als **Ersatzspannungsquelle** (U_0 , R_i) oder **Ersatzstromquelle** (I_0 , R_i) darstellen. Rezept:

1. **Leerlaufspannung** U_0 : Spannung an den offenen Klemmen berechnen
2. **Innenwiderstand** R_i : alle Quellen „deaktivieren“ – Spannungsquellen $\rightarrow$ **Kurzschluss**, Stromquellen $\rightarrow$ **Unterbrechung** – dann Widerstand von den Klemmen aus berechnen
3. Kontrolle oder Alternative zu 2.: **Kurzschlussstrom** I_k berechnen, dann $R_i = U_0 / I_k$

Das ist die zentrale Technik der Klausur-Netzwerkaufgaben!



Beispiel: Ersatzquelle des belasteten Spannungsteilers

Unser Spannungsteiler aus letzter Woche ($U = 12\text{ V}$, $R_1 = R_2 = 1\text{ k}\Omega$) als Ersatzquelle an den Abgriffklemmen:

$\rightarrow$ Tafel:

1. $U_0 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6\text{ V}$
2. Quelle deaktivieren (kurzschließen): $R_i = R_1 \parallel R_2 = 500\Omega$
3. Last $R_L = 1\text{ k}\Omega$ anschließen: $U_a = U_0 \cdot \frac{R_L}{R_i + R_L} = 6 \cdot \frac{1000}{1500} = 4\text{ V} \checkmark$

Gleiche Antwort wie letzte Woche – aber jetzt in 2 Zeilen statt Netzwerk-Umformung!

Reihenschaltung von aktiven, linearen Zweipolen

Bei der Reihenschaltung von realen Spannungsquellen addieren sich Leerlaufspannungen und Innenwiderstände:

$$U_{0, \text{ges}} = \sum_j U_{0,j}, \quad R_{i, \text{ges}} = \sum_j R_{i,j}$$

Anwendung: Batteriepacks (Taschenlampe, E-Auto) **Vorteil:** höhere Gesamtspannung • **Nachteil:** höherer Innenwiderstand

Parallelschaltung von aktiven, linearen Zweipolen

Bei der Parallelschaltung von realen Spannungsquellen mit gleicher Leerlaufspannung U_0 addieren sich die Leitwerte der Innenwiderstände:

$$\frac{1}{R_{i, \text{ges}}} = \sum_j \frac{1}{R_{i,j}}$$

Anwendung: höhere Ströme, Redundanz **Nachteil:** nur bei gleichen Spannungen sinnvoll (sonst Ausgleichsströme!)



Jetzt sind Sie dran: Ersatzquelle (zu zweit)

Aufgabe 8 (Klausuraufgaben-Typ!)

Eine Spannungsquelle U_e speist einen Spannungsteiler aus R_1 und R_2 ; an den Klemmen über R_2 wird U_a abgenommen. **Schaltung zeichnen!**

- Bestimmen Sie **allgemein** die Leerlaufspannung U_0 , den Innenwiderstand R_i und den Kurzschlussstrom I_k der Ersatzquelle.
- Gegeben: $U_e = 150 \text{ V}$, im Leerlauf $U_a = 50 \text{ V}$, bei $I = 0,5 \text{ A}$ ist $U_a = 45 \text{ V}$. Wie groß müssen R_1 und R_2 sein?
- Wie groß muss ein Lastwiderstand R_a sein, damit er die größtmögliche Leistung aufnimmt, und wie groß ist diese? (*Vorgriff auf nächste Woche – Vermutung reicht!*)

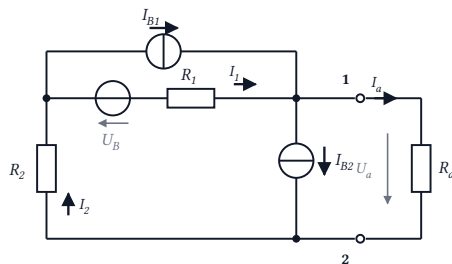


Klausuraufgabe: Gleichstromnetzwerk (zu zweit)

Die Schaltung liefert an den Klemmen 1–2 die Spannung U_a :

- Wie viele *unabhängige* Knotenpunktgleichungen gibt es? Stellen Sie sie auf.
- Leerlauf** ($R_a \rightarrow \infty$): Geben Sie I_1 und I_2 in Abhängigkeit der Stromquellen an.

- c) Bestimmen Sie das **Spannungsquellen-Ersatzschaltbild** links der Klemmen 1-2 (U_0 , R_i allgemein).
- d) Die Schaltung soll $U_0 = 10\text{ V}$ und $P_{\max} = 5\text{ W}$ liefern. Wie groß muss R_i sein?



Zwischenstand & Ausblick (Woche 4)

- Reale Quelle = zwei Kenngrößen: U_0 und R_i (oder äquivalent $I_0 = U_0/R_i$)
- Kennlinie = fallende Gerade zwischen Leerlauf (U_0) und Kurzschluss (I_k)
- **Rezept Ersatzquelle:** U_0 im Leerlauf; R_i mit deaktivierten Quellen; Kontrolle über I_k
- Quellen deaktivieren: U-Quelle $\rightarrow$ Kurzschluss, I-Quelle $\rightarrow$ Unterbrechung

Nächste Woche: Wie viel Leistung bekommt man aus einer Quelle heraus – und wie misst man in realen Schaltungen?

Elektrische Arbeit (Energie)

Die elektrische Arbeit ist das Produkt aus Spannung, Strom und Zeit:

$$W = U \cdot I \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

Einheit: $[W] = \text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s} = \text{W} \cdot \text{s} = \text{J}$ (Joule)

Elektrische Leistung

Die elektrische Leistung ist Arbeit pro Zeiteinheit:

$$P = \frac{dW}{dt} = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

Einheit: $[P] = \text{W}$ (Watt)

Die drei Schreibweisen sind über das Ohm'sche Gesetz äquivalent – nehmen Sie die, deren Größen Sie kennen.

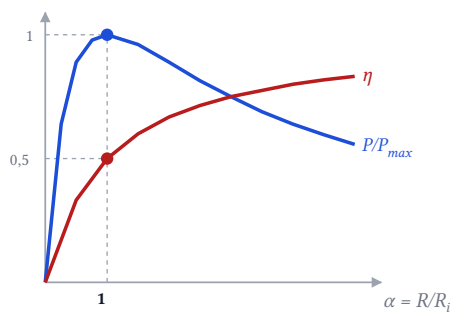
Leistungsanpassung

Bei welchem Verbraucherwiderstand R liefert eine reale Quelle (U_0, R_i) die maximale Leistung an den Verbraucher?

$$P = R \cdot I^2 = U_0^2 \cdot \frac{R}{(R_i + R)^2}$$

- Leerlauf ($R \rightarrow \infty$): $P = 0$; Kurzschluss ($R = 0$): $P = 0$
- Maximum dazwischen: $R = R_i$ (Herleitung $\rightarrow$ Tafel)

$$P_{\max} = \frac{U_0^2}{4R_i}$$



Anpassungsverhältnis und Wirkungsgrad

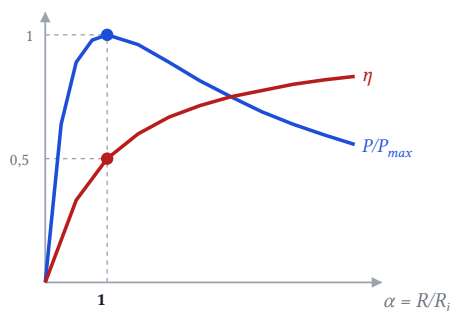
Anpassungsverhältnis: $\alpha = \frac{R}{R_i}$

Wirkungsgrad = Verbraucherleistung / Gesamtleistung der Quelle:

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{R}{R_i + R} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

⚠ Bei Leistungsanpassung ($\alpha = 1$) ist $\eta = 0,5$ – die Hälfte der Energie heizt die Quelle!

- Nachrichtentechnik: Anpassung (maximales Signal zählt)
- Energietechnik: Überanpassung $R \gg R_i$ (Wirkungsgrad zählt)



Betriebszustände einer aktiven Quelle

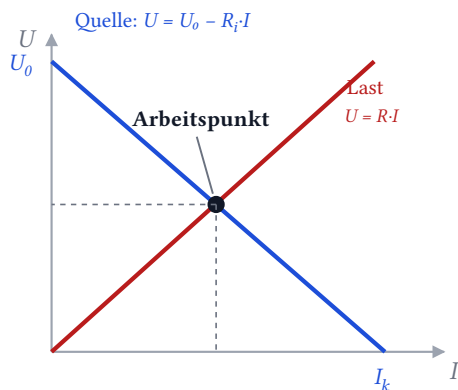
	Last	Leistung Quelle P_0	Leistung Last P	Wirkungsgrad η
Kurzschluss	$R = 0$	$P_0 = \frac{U_0^2}{R_i}$	$P = 0$	$\eta = 0$
Unteranpassung	$R < R_i$	$P_0 = \frac{U_0^2}{R_i} \cdot \frac{R}{R+R_i}$	$0 < P < P_{\max}$	$0 < \eta < 0,5$
Anpassung	$R = R_i$	$P_0 = \frac{U_0^2}{2R_i}$	$P = \frac{U_0^2}{4R_i}$	$\eta = 0,5$
Überanpassung	$R > R_i$	$P_0 = \frac{U_0^2}{R_i} \cdot \frac{R}{R+R_i}$	$0 < P < P_{\max}$	$0,5 < \eta < 1$
Leerlauf	$R \rightarrow \infty$	$P_0 = 0$	$P = 0$	$\eta = 1$

U-I-Kennlinie und Arbeitspunkt

Quelle und Verbraucher in einem Diagramm:

- **Quelle:** fallende Gerade $U = U_0 - R_i \cdot I$
- **Verbraucher:** steigende Gerade $U = R \cdot I$
- Schnittpunkt = **Arbeitspunkt:** dort stellen sich U und I tatsächlich ein

Grafische Lösung – Klausuraufgaben sagen: „Ermitteln Sie grafisch ...“ oder „Arbeitspunkt einzeichnen“!



Jetzt sind Sie dran: Autobatterie (zu zweit)

Aufgabe 9 (= Klausuraufgaben-Typ „Kennlinie aus Messwerten“)

An den Klemmen einer Autobatterie wird bei wechselnder Last gemessen:

U_a/V	11,8	11,6	11	10	8
I/A	10	20	50	100	200

- Bestimmen Sie die Leerlaufspannung U_0 und den Innenwiderstand R_i .
- Die Batterie wird mit $R = 0,2 \Omega$ belastet. Wie hoch ist der Wirkungsgrad η ?

Reale Messungen: Spannung

Jedes reale Voltmeter hat einen **endlichen Innenwiderstand** und belastet die Schaltung:

- Digitalmultimeter (DMM): typisch $R_i \approx 10 \text{ M}\Omega$
- Das Voltmeter liegt **parallel** zum Messobjekt $\rightarrow$ wirkt wie ein Lastwiderstand $\rightarrow$ **Lastfehler**, wenn R_i nicht $\gg$ Quellwiderstand
- In Klausuraufgaben: „ideales Voltmeter“ = $R_i \rightarrow \infty$, zieht keinen Strom

Faustregel: Spannungsmessung ist unkritisch, solange $R_{\text{Quelle}} \ll R_{i, \text{Voltmeter}}$

Reale Messungen: Strom mit dem Shunt

Wie misst man große Ströme (z.B. 100 A im Bordnetz)? **Über einen Shunt:**

- Kleiner, präziser Widerstand (z.B. $R_S = 1 \text{ m}\Omega$) im Strompfad
- Gemessen wird die **Spannung** über dem Shunt: $I = U_S / R_S$
- Bei 100 A: $U_S = 100 \text{ mV}$ – gut messbar, Verlustleistung nur 10 W

Heute überall: Batteriemanagement, Motorsteuerungen, jedes DMM im Amperebereich hat intern einen Shunt.

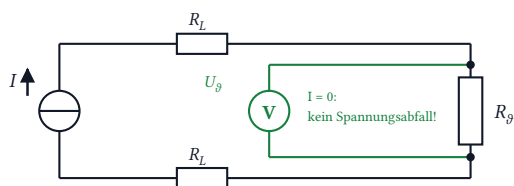
Reale Messungen: Vierleitermessung

Problem: Bei kleinen Widerständen (z.B. Pt100 mit 100Ω) verfälscht der **Leitungswiderstand** der Zuleitungen die Messung.

Lösung – Vierleitermessung:

- Zwei Leitungen führen den (bekannten) Messstrom I
- Zwei separate Leitungen messen die Spannung **direkt am Sensor** – durch sie fließt (ideales Voltmeter!) kein Strom $\rightarrow$ kein Spannungsabfall $\rightarrow$ Leitungswiderstand fällt heraus

Klausur-Klassiker (SoSe 2019!) und Alltagstechnik: jedes Labornetzteil mit „Sense“-Klemmen.



Jetzt sind Sie dran: Temperaturmessung (zu zweit)

Aufgabe 10 (Klausuraufgaben-Typ SoSe 2019)

Ein Pt100 ($R_0 = 100 \, \Omega$ bei $\vartheta_0 = 0^\circ \text{C}$, $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$) wird von einer idealen Stromquelle mit $I = 1 \text{ mA}$ gespeist. Über eine Vierleitermessung wird direkt am Sensor $U_g = 120 \text{ mV}$ gemessen.

- Wie groß ist der Sensorwiderstand R_g ?
- Welche Temperatur ϑ hat der Sensor?
- Welche Leistung P_g nimmt der Sensor auf? Warum sollte sie klein bleiben?

Unsere Basiseinheiten-Tabelle wächst

Elektrische Größe	Formelzeichen	Einheit	Basiseinheiten
Ladung	Q	C	$\text{A} \cdot \text{s}$
Spannung	U	V	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$
Kapazität	C	F	$\frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}$
Widerstand	R	Ω	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^3}$
Leistung	P	W	$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$

Herleitung an der Tafel: $[R] = \frac{[U]}{[I]}$, $[P] = [U] \cdot [I]$

Zusammenfassung: Gleichstrom

- $I = dQ/dt$; Ohm: $U = R \cdot I$; $R = \rho l/A$; $R(T)$ linear mit α
- Kirchhoff: Knoten- und Maschenregel; $k - 1$ unabhängige Knotengleichungen
- Reihe: R addieren, Spannungsteiler; parallel: G addieren, Stromteiler – **Topologie zählt, nicht die Zeichnung!**
- Zweipoltheorie:** jedes lineare Netzwerk = $U_0 + R_i$; Quellen deaktivieren für R_i
- Leistungsanpassung: $P_{\max} = U_0^2/4R_i$ bei $R = R_i$, dann $\eta = 0,5$
- Arbeitspunkt = Schnittpunkt von Quellen- und Lastkennlinie
- Messen: Lastfehler, Shunt, Vierleitermessung

Nächstes Kapitel: Magnetismus – das zweite große Feld der Elektrotechnik 